第15講　総合演習2

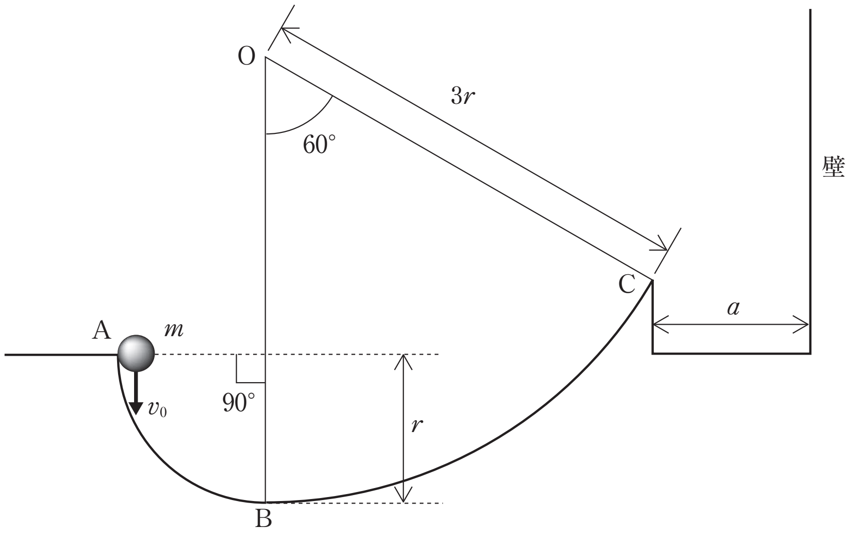
1

図はスノーボード用の滑走コースの断面図である。半径 r の円弧ABが，点Oを中心とする半径 $3r$ の円弧BCに点Bで滑らかに接続されている。図中のOBは鉛直で，円弧ABの中心角は90度，円弧BCの中心角は60度である。円弧BCの右端の点Cから右側に距離 a だけ離れた位置には，図に示した断面に垂直で鉛直な壁がある。スノーボードや人の大きさは，滑走コースの大きさに比べて無視できるほど小さいため，スノーボードと人を合わせて一つの小球と考えてよい。所持品などを含めた人の質量とスノーボードの質量の合計が m であるとして，以下では，人とスノーボードを合わせて「ボード」と略して呼ぶことにする。このとき，点Aからボードを鉛直下向きの初速 v_0 で滑走させた後の運動を考える。ただし，円弧ABとBCに沿った面とボードの間には摩擦が無く，空気抵抗も無視できるものとし，重力加速度の大きさを g とする。また，運動はこの断面内に限られるものとする。以下の問に答えよ。

(1)　初速 $v_0 = 0$ で点Aから滑走を開始したボードが点Bを右向きに通過した。

(a)　点Bでのボードの速さ v_1 を，m，r，g の中から必要なものを用いて表せ。

(b)　点Bを通過する直前と直後にボードがコースから受ける垂直抗力を，それぞれ N，N' とする。それらの比 $\dfrac{N'}{N}$ を求めよ。ただし，ボードが点Bを通過する直前と直後の運動は，それぞれ等速円運動と考えてよい。



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　次に，初速を $v_0=2\sqrt{gr}$ としたところ，ボードは点Ｃから速さ v_2 で飛び出した。その後ボードは壁に衝突してはねかえった。ただし，ボードと壁の反発係数を e ($0<e<1$) とする。

(a)　v_2 を，m，r，g の中から必要なものを用いて表せ。

(b)　点Ｃから飛び出したボードは壁に垂直に衝突した。距離 a を，m，r，g の中から必要なものを用いて表せ。

(c)　問(2)(b)のようにボードが壁に垂直に衝突した場合には，そのままではボードは円弧のコース上に戻ることができない。コース上に戻るために，壁に衝突してボードがはねかえった直後に，人が持っていた質量 m_1 の物体を，図に示した断面内で水平に投げ捨てることを考える。投げ捨てた直後における，物体とボードとの相対的な速さを v_3 としたところ，ボードは点Ｃに戻った。v_3 を，m，m_1，r，g，e の中から必要なものを用いて表せ。ただし，この間，ボードが再び壁に衝突することも，捨てた物体が再びボードに戻ることもないものとする。

(d)　問(2)(c)において，質量 m_1 が特定の値の場合は，捨てられた物体は，壁に沿って鉛直下向きに落下する。このときの質量 m_1 を，m，r，g，e の中から必要なものを用いて表せ。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の文を読んで，□には適した式を，□には適した数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。

図１のように，水平な地表面上に敷かれたレール上を電車が一定の速さ V で動いているとする。このレールは，点Ｑの手前で点Ｏを中心とした半径 R の円弧状であり，点Ｑの先では点Ｑで円弧に接する直線状となっている。レールの幅，電車の幅，長さ，高さはいずれも，R に比べて非常に小さいとする。以下の(1)～(3)では電車が円弧状のレール上を動いているときについて，(4)では電車が直線状のレール上を動いているときについて，車内での小物体の運動を考える。ここで，重力加速度の大きさを g とし，小物体の大きさと小物体に対する空気の抵抗はいずれも無視する。

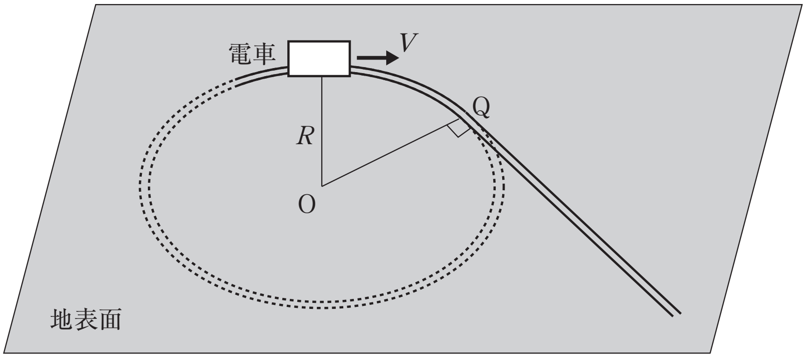


図１

(1)　電車が点Ｑの手前の円弧状のレール上を走っているとき，図２のように，電車の天井の点Ｓから，質量の無視できる長さ d の糸でつるされた質量 m の小物体は，車内の観測者から見て静止していた。なお，図２はこの電車を進行方向から見たところであり，図の左方向が中心Ｏの方向である。また，点Ａは電車が動いていないときの小物体の静止位置である。このとき，車内の観測者には，車内の小物体に大きさ［ア］の遠心力が働いているように見えるので，糸が鉛直線SAとなす角度 θ は $\tan\theta =$［イ］を満たす。また，糸の張力 T と重力 mg との比は θ のみを用いて，$\dfrac{T}{mg} =$［ウ］と表される。

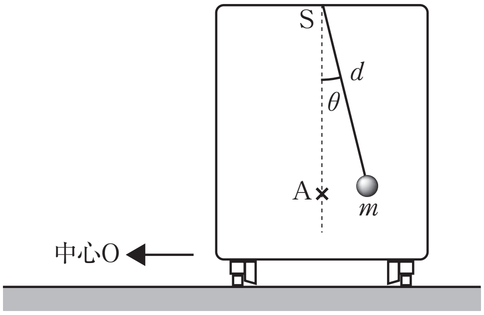


図２

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2)　小物体が車内の観測者から見て動いているときでも，その速さが V に比べてじゅうぶんに小さければ，短い間に電車の加速度運動が小物体へ及ぼす影響は，大きさ［ア］の遠心力のみに表れると近似的に考えることができる。以下，この近似を使って考えることにする。この場合，車内の観測者から見て小物体には常に重力と大きさ［ア］の遠心力の合力が働くので，あたかも重力加速度の方向と大きさが変化したように見える。この見かけの重力加速度の大きさを g' とすると，g' と g の比は θ のみを用いて表すことができて，$\dfrac{g'}{g}=$［エ］となる。

(3)　小物体を点Aから，車内の観測者から見て速さ u で電車の進行方向に押し出した。この後，小物体は車内の観測者から見て円運動をした。この円運動の半径は d と θ を用いて表すと［オ］である。また，速さ u は d，g'，θ を用いて表すと $u=$［カ］であり，円運動の周期は d，g'，θ を用いて表すと［キ］となる。

(4)　この小物体が(3)のように円運動をしていて，ちょうど点Aを通過したときに，電車は図1のレール上の点Qを通過し，直線状のレールに速さ V のまま移った。この直線状のレール上を走っているとき，車内の観測者が見ると，図3のように，小物体は点Aを中心とする振動をした。この振動において，点Aからはかった小物体の最高位置の高さ h は u と g を用いて，$h=$［ク］と表される。したがって，この振動において糸が鉛直線となす最大の角度を α として，$\dfrac{g'}{g}=$［エ］と $u=$［カ］の結果を使って，$\cos\alpha$ を $\tan\theta$ のみを用いて表すと，$\cos\alpha=$［ケ］となる。ここで α も θ も小さいとして $\cos\alpha\fallingdotseq 1-\dfrac{\alpha^2}{2}$ および $\tan\theta\fallingdotseq\theta$ と近似すると，$\alpha\fallingdotseq$［コ］$\times\theta$ となる。

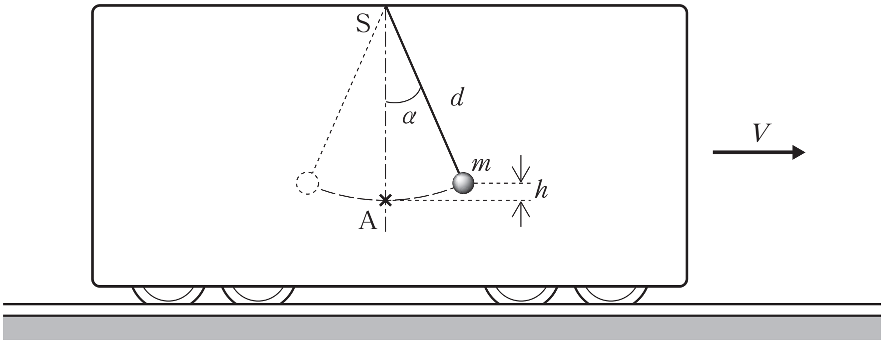


図3

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

図1に示すように，質量は無視できる細いゴムひもがA点よりつるされ，下端がB点に達している。ゴムひもの下端に質量mのおもりをつけると，ゴムひもは長さδだけ伸び，下端がC点に達して静止した。次に，おもりをさらに2δだけ引き下げて，D点で静かに手放したところ，図2に示すように，おもりは最高点Eに達し，DE間で上下の振動をした。ゴムひもには，伸びている時だけフックの法則に従って張力が生じるが，縮んでいる時には，たるんで力が生じないものとする。重力加速度の大きさをgとし，以下の問に答えよ。

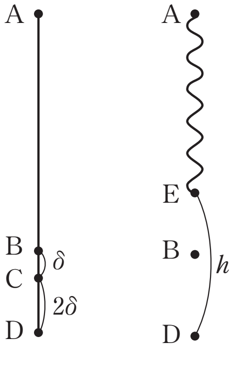


図1　　図2

(1)　おもりをD点に下げた時，ゴムひもに生じる張力を求めよ。

(2)　おもりが上下の振動をする時，はじめにB点に達するまでの時刻を求めよ。また，B点におけるおもりの速さv_Bを求めよ。ただし，はじめに点Dでおもりを手放した瞬間を$t=0$とする。

(3)　DE間の距離を求めよ。

(4)　おもりがDE間を1回往復するのにかかる時間（周期）を求めよ。ただし，小球が点Aに届くことはないものとする。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

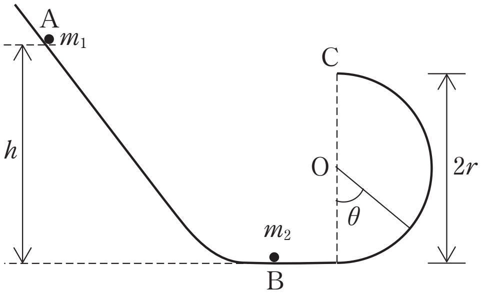
＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　確認テスト

次の文中の空欄［ア］〜［ク］に最も適するものをそれぞれの解答群から一つ選びなさい。

図のように，質量 m_1 の小球１が斜面上の高さ h の点Ａにあり，質量 m_2 の小球２が水平面上の点Ｂにあって静止している。さらに，その右側には，点Ｏを中心とする半径 r の半球面があり，その最高点Ｃの高さは $2r$ である。斜面，水平面，半球の内面はどれもなめらかであり，互いになめらかに接続されている。ここで，点Ａから小球１が静かに斜面に沿ってすべり始め，水平面に到達した後の運動を考えよう。重力の加速度の大きさを g として答えよ。



小球１が水平面に到達したときの速さ v_1 は，$v_1 = \sqrt{2gh}$ である。その後，小球１は，点Ｂにおいて小球２に衝突した。このとき，はねかえり係数を１とすると，衝突直後の小球２の速さ v_2 は，v_1 を用いて

$v_2 =$［ア］

となる。

その後，小球２は，半球の内面をすべり上がった。ここで，図のように点Ｏを通る鉛直線から測った角度 θ により半球の内面上の点の位置を表す。小球２が角度 θ の位置にあるとき，小球２の速さ v_2' は $v_2' =$［イ］である。このとき，小球２に遠心力が働くことを考慮に入れると，小球２が半球面から受ける垂直抗力 N は

$N =$［ウ］＋［エ］

と表せる。

さらに，小球２が半球の内面を離れずに点Ｃまですべり上がるためには，点Ｃで小球２に働く垂直抗力 N が $N \geqq 0$ でなければならない。したがって，点Ｃでの小球２の速さ $v_{2\mathrm{C}}$ は，条件［オ］を満たす必要がある。一方，$v_{2\mathrm{C}}$ は，衝突直後の速さ v_2 を用いて $v_{2\mathrm{C}} =$［カ］と表される。これらの結果から，v_2 が条件［キ］を満たすときに，小球２は点Ｃに到達できる。

以上により，小球１がはじめにいた点Ａの高さ h に必要な条件を考えよう。小球２が点Ｃに到達できるために必要な点Ａの最低の高さ h は，$h =$［ク］である。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ア の解答群

① $\dfrac{m_1}{m_1+m_2}v_1$　② $\dfrac{m_1+m_2}{m_1}v_1$　③ $\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$　④ $\dfrac{m_1+m_2}{2m_1}v_1$

⑤ $\dfrac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1$　⑥ $\dfrac{m_1+m_2}{m_1-m_2}v_1$

イ の解答群

① $\sqrt{{v_2}^2-2rg\sin\theta}$　② $\sqrt{{v_2}^2-2rg\cos\theta}$

③ $\sqrt{{v_2}^2-4rg\sin\theta}$　④ $\sqrt{{v_2}^2-4rg\cos\theta}$

⑤ $\sqrt{{v_2}^2-2rg(1-\sin\theta)}$　⑥ $\sqrt{{v_2}^2-2rg(1-\cos\theta)}$

⑦ $\sqrt{{v_2}^2-4rg(1-\sin\theta)}$　⑧ $\sqrt{{v_2}^2-4rg(1-\cos\theta)}$

ウ の解答群

① $\dfrac{m_2{v_2'}^2}{2r}$　② $-\dfrac{m_2{v_2'}^2}{2r}$　③ $\dfrac{m_2{v_2'}^2}{r}$　④ $-\dfrac{m_2{v_2'}^2}{r}$

⑤ $\dfrac{{v_2'}^2}{2r}$　⑥ $-\dfrac{{v_2'}^2}{2r}$　⑦ $\dfrac{{v_2'}^2}{r}$　⑧ $-\dfrac{{v_2'}^2}{r}$

エ の解答群

① $m_2g\sin\theta$　② $-m_2g\sin\theta$

③ $m_2g\cos\theta$　④ $-m_2g\cos\theta$

⑤ $m_2g(1-\sin\theta)$　⑥ $-m_2g(1-\sin\theta)$

⑦ $m_2g(1-\cos\theta)$　⑧ $-m_2g(1-\cos\theta)$

オ の解答群

① $v_{2C}\geqq\sqrt{m_2rg}$　② $v_{2C}\geqq\sqrt{\dfrac{1}{2}rg}$

③ $v_{2C}\geqq\sqrt{rg}$　④ $v_{2C}\leqq\sqrt{m_2rg}$

⑤ $v_{2C}\leqq\sqrt{\dfrac{1}{2}rg}$　⑥ $v_{2C}\leqq\sqrt{rg}$

⑦ $v_{2C}\geqq 0$　⑧ $v_{2C}=0$

カ の解答群

① $\sqrt{{v_2}^2+4m_2rg}$　② $\sqrt{{v_2}^2-4m_2rg}$

③ $\sqrt{{v_2}^2+2m_2rg}$　④ $\sqrt{{v_2}^2-2m_2rg}$

⑤ $\sqrt{{v_2}^2+2rg}$　⑥ $\sqrt{{v_2}^2-2rg}$

⑦ $\sqrt{{v_2}^2+4rg}$　⑧ $\sqrt{{v_2}^2-4rg}$

キ の解答群

① $v_2\geqq\sqrt{5rg}$　② $v_2\geqq 2\sqrt{rg}$　③ $v_2\geqq\sqrt{3rg}$　④ $v_2\geqq\sqrt{rg}$

⑤ $v_2\leqq\sqrt{5rg}$　⑥ $v_2\leqq 2\sqrt{rg}$　⑦ $v_2\leqq\sqrt{3rg}$　⑧ $v_2\leqq\sqrt{rg}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ク の解答群

① $\dfrac{5m_2}{2m_1}r$　　② $\dfrac{2m_2}{m_1}r$

③ $\dfrac{m_2}{m_1}r$　　④ $\dfrac{m_2}{2m_1}r$

⑤ $2\left(\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 r$　　⑥ $\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 r$

⑦ $\dfrac{5}{8}\left(\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 r$　　⑧ $\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2 r$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　解答

1

（1）（a）$\sqrt{2gr}$　　（b）$\dfrac{5}{9}$

（2）（a）$\sqrt{3gr}$　　（b）$\dfrac{3\sqrt{3}}{4}r$

（c）$\dfrac{(1-e)m}{2m_1}\sqrt{3gr}$　　（d）$(1-e)m$

2

（1）ア　$\dfrac{mV^2}{R}$　　イ　$\dfrac{V^2}{gR}$　　ウ　$\dfrac{1}{\cos\theta}$

（2）エ　$\dfrac{1}{\cos\theta}$

（3）オ　$d\sin\theta$　　カ　$\sqrt{g'd\tan\theta\sin\theta}$　　キ　$2\pi\sqrt{\dfrac{d\cos\theta}{g'}}$

（4）ク　$\dfrac{u^2}{2g}$　　ケ　$1-\dfrac{1}{2}\tan^2\theta$　　コ　1

3

（1）$3mg$

（2）時間：$\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\delta}{g}}$，速さ：$\sqrt{3g\delta}$

（3）$\dfrac{9}{2}\delta$

（4）$2\left\{\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{\delta}{g}}+\sqrt{\dfrac{3\delta}{g}}\right\}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　確認テスト

【解答】

ア	③	イ	⑥	ウ	③	エ	③
オ	③	カ	⑧	キ	①	ク	⑦

【解説】

運動量保存則：$m_1v_1=m_1v_1'+m_2v_2$ とはね返り係数の式：$-(v_1-0)=v_1'-v_2$ より，

$$v_2=\boldsymbol{\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1}\ _ア$$

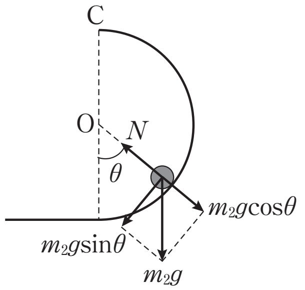
円軌道上の角 θ の位置において，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m_2v_2{}^2=\frac{1}{2}m_2v_2{}'^2+m_2gr(1-\cos\theta)\qquad \therefore\ v_2{}'=\boldsymbol{\sqrt{v_2{}^2-2gr(1-\cos\theta)}}\ _イ$$

円運動の方程式は，

$$m_2\frac{v_2{}'^2}{r}=N-m_2g\cos\theta\qquad \therefore\ N=\boldsymbol{m_2\frac{v_2{}'^2}{r}}\ _ウ+\boldsymbol{m_2g\cos\theta}\ _エ$$

点Cにおける円運動の方程式より



$$m_2\frac{v_{2\mathrm{C}}{}^2}{r}=N+m_2g\qquad \therefore\ N=m_2\frac{v_{2\mathrm{C}}{}^2}{r}-m_2g$$

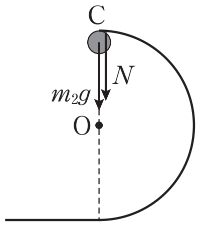
$N\geqq 0$ のためには，

$$m_2\frac{v_{2\mathrm{C}}{}^2}{r}-m_2g\geqq 0\qquad \therefore\ \boldsymbol{v_{2\mathrm{C}}\geqq\sqrt{gr}}\ _オ$$

他方，$v_{2\mathrm{C}}$ は，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m_2v_2{}^2=\frac{1}{2}m_2v_{2\mathrm{C}}{}^2+mg\cdot 2r$$

$$\therefore\ v_{2\mathrm{C}}=\boldsymbol{\sqrt{v_2{}^2-4gr}}\ _カ$$



オ，カ より，条件は

$$\sqrt{v_2{}^2-4gr}\geqq\sqrt{gr}\qquad \therefore\ \boldsymbol{v_2\geqq\sqrt{5gr}}\ _キ$$

$v_2=\dfrac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh_1}$ であったから，h_1 の条件は

$$\frac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gh_1}\geqq\sqrt{5gr}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{h_1\geqq\frac{5}{8}\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}\right)^2r}\ _ク$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。